ECOLE NATIONALE DU GENIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

CONCOURS D'ENTREE 1996

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures.

PROBLEME

Dans ce problème n *désigne un entier naturel.*

PARTIE I

Calcul direct de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. On admet que si $n \to +\infty$ l'intégrale $I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt$ est équivalente à $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

a. Démontrer que pour tout x réel tel que $x^2 \leq n$ et $n \geq 1$, on a $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2}$ et pour tout x réel $e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$. (On rappelle que $\ln(1+t) \leq t \leq -\ln(1-t)$ si $|t| < 1$).

b. On pose $B_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}$ et $C_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$ $(n \geq 1)$.

Justifier que B_n converge puis transformer B_n en posant $x = \sqrt{n} \tan \varphi$ et C_n en posant $x = \sqrt{n} \sin \varphi$.

En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, en justifiant qu'elle converge.

PARTIE II

On étudie, dans cette partie, l'équation différentielle réelle :

(E) $\quad y' = e^y - x$ définie pour tout x réel.

On se place dans le plan euclidien xOy rapporté à un repère orthonormé d'axes x'Ox et y'Oy.

A. On pose, pour tout x réel, $\varphi(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Donner (ou rappeler) la limite en l'infini de $\varphi(x)$.

B. Résolution de (E).

1. a. En posant $z = e^{-y}$ ramener l'équation différentielle (E) à une équation linéaire.

   b. En déduire une expression de la solution générale de (E) au moyen de la fonction φ.

2. Dessiner un régionnement du plan xOy indiquant le signe de y'.

3. Déterminer l'ensemble $\mathfrak{I}$ des points des courbes représentatives des solutions de (E) où $y'' = 0$. Représenter $\mathfrak{I}$ sur le dessin précédent.

4. On considère la fonction qui vérifie, pour y_0 réel donné,

   (C) $\quad y' = e^y - x \;,\; y(0) = y_0$

   a. Donner l'expression de la solution vérifiant (C).

   b. Démontrer qu'il existe un réel α tel que :
   - si $y_0 \leq \alpha$ cette solution est définie sur $\mathbb{R}$;
   - si $y_0 > \alpha$ cette solution est définie sur un intervalle $]-\infty, k[$ où k dépend de y_0.

5. On considère, dans cette question, le cas particulier où $y_0 = \alpha$.
   Soit $y = g(x)$ la solution de (C) correspondante.

   a. Exprimer g(x) à l'aide de x et $\varphi(x)$.

   b. On étudie ici le comportement de g(x) lorsque x tend vers $+\infty$.

   En écrivant que $\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t} \left(t \, e^{-\frac{t^2}{2}} \right) dt$ et en faisant une intégration par parties démontrer que : $g(x) = \ln(x) - \ln(1-u(x))$ avec $u(x) = x.e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

   Transformer au moyen d'une nouvelle intégration par parties et en déduire un équivalent de g(x) en $+\infty$.

6. Préciser suivant les valeurs de y_0 le comportement des solutions de (C) aux bornes (éventuellement infinies) de leur intervalle de définition.

7. Soit y une solution de (C).

   a. Démontrer que l'équation $y'(x) = 0$ équivaut à $\psi(x) = e^{-y_0}$ où $\psi(x)$ est à préciser.

   b. En déduire selon les valeurs de y_0 le nombre de racines de l'équation $y'(x) = 0$ et le signe de $y'(x)$.

PARTIE III

On étudie, dans cette partie, la fonction réelle : $f : x \longrightarrow e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

A. 1. Soit $g : u \longrightarrow e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2}$ définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

   a. Calculer $g''(u)$, puis démontrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

   b. En déduire que pour tout t positif on a $e^{t^2} > 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}$.

2. Pour tout $x > 0$, on pose $h(x) = \frac{e^{x^2}}{2x} - \int_0^x e^{t^2}\,dt$.

   a. Donner le tableau des variations de h sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b. Déterminer $\lim_{x\longrightarrow 0+} h(x)$, et $\lim_{x\longrightarrow +\infty} h(x)$ (on pourra s'inspirer de la méthode de la question II.5.b.).

   c. Démontrer qu'il existe un unique réel $0 < a < 1$ tel que $h(a) = 0$.

B. 1. a. Démontrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$(F) \qquad y' + 2xy = 1$$

   b. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (F).

2. a. Soit $x > 0$; vérifier que l'on a $0 \le f(x) \le e^{-x^2}\int_0^x e^{tx}dt$.

   b. En déduire $\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$.

   c. Donner le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

C. Soit $A(x) = 2xe^{-x^2}\int_0^{x-1} e^{t^2}dt$ et $B(x) = 2xe^{-x^2}\int_{x-1}^x e^{t^2}dt$.

1. a. Pour $x > 1$, prouver que $A(x) \le 2xe^{-x^2}e^{(x-1)^2}(x-1)$.

   b. En déduire la limite de A(x) quand x tend vers $+\infty$.

2. a. Démontrer que si $x > 1$, on a les inégalités :

$$\frac{1}{x}\int_{x-1}^x te^{t^2}dt \le \int_{x-1}^x e^{t^2}dt \le \frac{1}{x-1}\int_{x-1}^x te^{t^2}dt.$$

   b. En déduire que : $\lim_{x\longrightarrow +\infty} B(x) = 1$.

3. Démontrer que $\frac{e^{x^2}}{2x}$ et $\int_0^x e^{t^2}dt$ sont équivalents quand x tend vers l'infini.

4. Soit, pour x non nul, l'équation différentielle :

$$(G) \qquad y' - y^2 - 2xy = 2$$

   a. Vérifier qu'une solution particulière de (G) est $v(x) = -\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. En posant $y = v + \frac{1}{z}$, vérifier que l'on obtient une équation linéaire. Résoudre (G).

   b. (G) a-t-elle une solution qui vérifie $y(0+) = y(0-) = 0$?